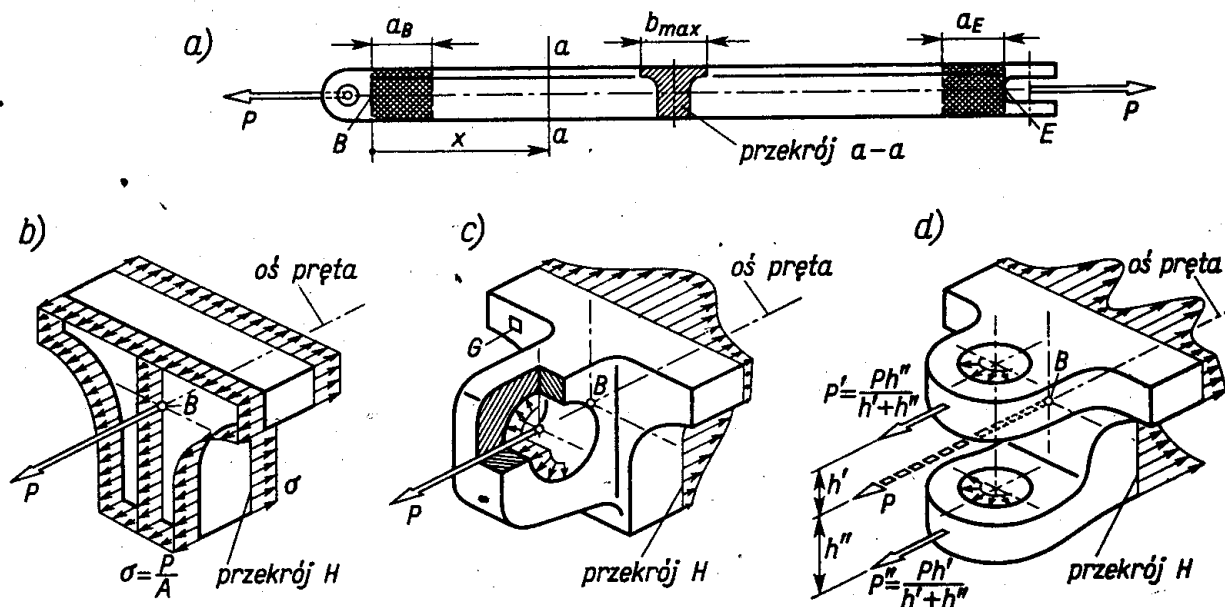


Analiza pręta statycznie wyznaczalnego

2 ROZCIĄGANIE LUB ŚCISKANIE

2.1. Model rozciąganego pręta a konstrukcje rzeczywiste

Rzeczywiste pręty rozciągane (rys. 2.1a) wykazują odstępstwa od teoretycznego modelu. Według bowiem tego modelu w końcowym przekroju B siła P powinna być przyłożona pod postacią naprężeń $\sigma = P/A$ równomiernych na całym polu przekroju (rys. 2.1b).



Rys. 2.1. Teoretyczny i rzeczywisty sposób wprowadzenia sił wzdłużnych

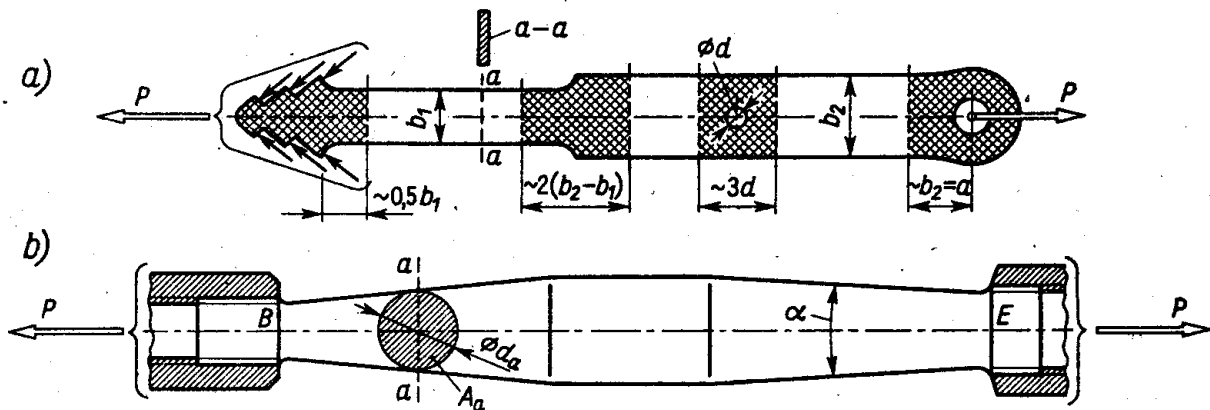
W rzeczywistości sposób wprowadzenia siły P jest odmienny od teoretycznego, na przykład przez sworzeń wchodzący w otwór ucha (rys. 2.1c). Ucho to nie obejmuje całego przekroju B i pewne jego części zostają swobodne. W takim punkcie jak punkt G nie ma oddziaływań

zewnątrznych i naprężenie $\sigma = 0$. Już z tego widać, że rozkład naprężeń σ nie jest w przekroju B równomierny, skutkiem czego w przekrojach sąsiednich, jak przekrój H , istnieje również nierównomierny rozkład σ . Charakter tego rozkładu zależy od sposobu wprowadzenia siły P i będzie inny, gdy na przykład ucho jest podwójne (rys. 2.1d).

W świetle tych faktów powstaje pytanie, jaki sens ma teoretyczny model omówiony w art. 1.7. Odpowiedź daje teoria sprężystości w postaci *zasady de Saint-Venanta* głoszącej, że dwa różne, ale statycznie równoważne⁽¹⁾, układy sił działając na tę samą małą część ciała dają zauważalne różnice rozkładu naprężeń tylko w bezpośrednim otoczeniu tej części. W odległościach dużych w porównaniu z wymiarami tej części rozkłady naprężeń odpowiadające statycznie równoważnym układom sił są praktycznie jednakowe. W rozpatrywanym przypadku częścią ciała, na którą działają różne układy sił o tej samej wypadkowej P , jest przekrój B . Zgodnie z zasadą de Saint-Venanta, te układy sił dadzą praktycznie jednakowy, czyli równomierny rozkład naprężeń w każdym przekroju $a-a$ (rys. 2.1a), o ile odległość x jest duża w porównaniu do wymiarów przekroju B . Zauważalne różnice rozkładu σ wystąpią tylko na długości a_B tego samego rzędu co i wymiary przekroju. Dla prętów o zwartym przekroju przyjmuje się

$$a_B = \text{maksymalny wymiar przekroju } B = b_{\max}, \quad (a)$$

gdyż w tej odległości różnice między wartościami σ w poszczególnych punktach przekroju nie przekraczają $\pm 3\%$ wartości P/A . Taką odchyłkę uznaje się za praktycznie dopuszczalną. To samo ograniczenie występuje na drugim końcu E . W wyniku przedział stosowności wzorów (1.7)÷(1.9) odpowiada niezakratkowanej na rys. 2.1a części pręta.



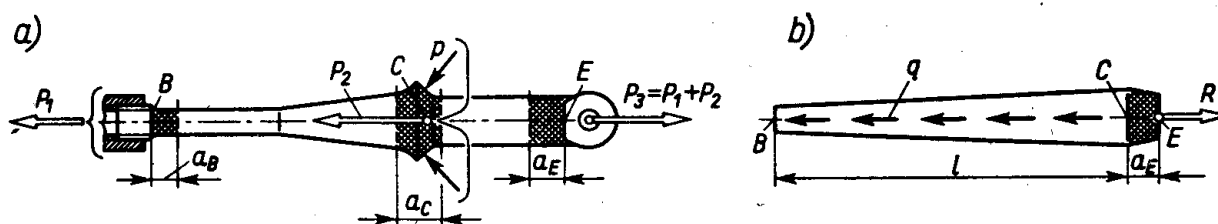
Rys. 2.2. Przedziały stosowności modelu pręta do rzeczywistych elementów obciążonych wzdłużnymi siłami

Podobną nierównomierność rozkładu σ obserwuje się w przypadku raptownych zmian przekroju, tzw. *karbów*, jak raptowne zwężenia lub otwory (rys. 2.2a). Nierównomierność ta ogranicza się do otoczenia karbu (zakratkowane obszary), w których wzorów (1.7)÷(1.9) nie można stosować. W odróżnieniu od tego przypadek łagodnej (kąt $\alpha < 20^\circ$) zmienności przekroju (rys. 2.2b) nie daje dużych zakłóceń (odchyłka $\pm 3\%$) i w badanym przekroju $a-a$ mamy

$$\sigma_a = N_a/A_a. \quad (2.1)$$

⁽¹⁾ To znaczy o tej samej wypadkowej, zajmującej to samo położenie.

Trzeciego rodzaju odstępstwa występują, gdy liczba obciążających sił jest większa od dwóch (rys. 2.3a). Wprowadzenie siły P_2 w postaci nacisków p powoduje lokalne zaburzenie w równomiernym rozkładzie naprężeń w otoczeniu przekroju C . Obszar wyraźnego zaburzenia rozciąga się znowu na długość a_c równą maksymalnemu wymiarowi przekroju C . Inna natomiast jest sytuacja, gdy obciążenie wzdłużne stanowią siły masowe o natężeniu q N/m (rys. 2.3b). Przy takim obciążeniu naprężenia σ_a są równomierne, z tym tylko, że wartość ich w różnych przekrojach jest na ogół różna, gdyż we wzorze (2.1) zmienna jest siła N_a i pole A_a .



Rys. 2.3. Ograniczenia stosowalności modelu pręta spowodowane obciążeniami

Powyższe informacje zilustrowane na przykładzie rozciąganego pręta mają znaczenie ogólne. Są one ważne i w innych przypadkach obciążenia, jak skręcanie, zginanie. Ich istota polega na zwróceniu uwagi, w jakiej mierze obliczenia rzeczywistych konstrukcji oparte na wzorach art. 1.7 są wiarogodne, w jakiej zaś wymagają uzupełnienia dodatkową analizą omówioną w rozdz. 17.

2.2. Przykłady analizy prętów wzdłużnie obciążonych

W odróżnieniu od prostych przypadków, omówionych w art. 1.7÷1.10, obecnie rozważymy zagadnienia bardziej złożone. Pierwszy typ zagadnień, tzw. *zadanie kontroli*, polega na określeniu naprężeń i odkształceń oraz współczynnika bezpieczeństwa konstrukcji o znanych wymiarach i znanych czynnych siłach, tj. P_1 , P_2 i q (rys. 2.4a). Po określeniu reakcji $R_E = P_1 + P_2 + ql_1$, znamy już obciążenie pręta i wyznaczamy następnie wysiłek każdego przekroju. Odcinając myślowo przekrojem $a-a$ dolną część pręta, na którą działają: wypadkowa qx_1 obciążeń ciągłych q , siła P_1 i nieznaną siłę normalną N_a (rys. 2.4b) mamy z równowagi tej części

$$N_a = P_1 + qx_1. \quad (a)$$

Jak widać, siła N_a zależy liniowo od współrzędnej x_1 badanego przekroju $a-a$ i jest rozciągająca, bo $N_a > 0$. Wynik (a) jest słuszny tylko w przedziale $0 < x_1 < l_1$, czyli dla odcinka BC . Dla odcinka CD przy podobnym badaniu wysiłku przekroju $b-b$ wypadkowa obciążeń q jest stała i równa ql_1 , wobec czego z warunku równowagi rzutów na oś pręta mamy

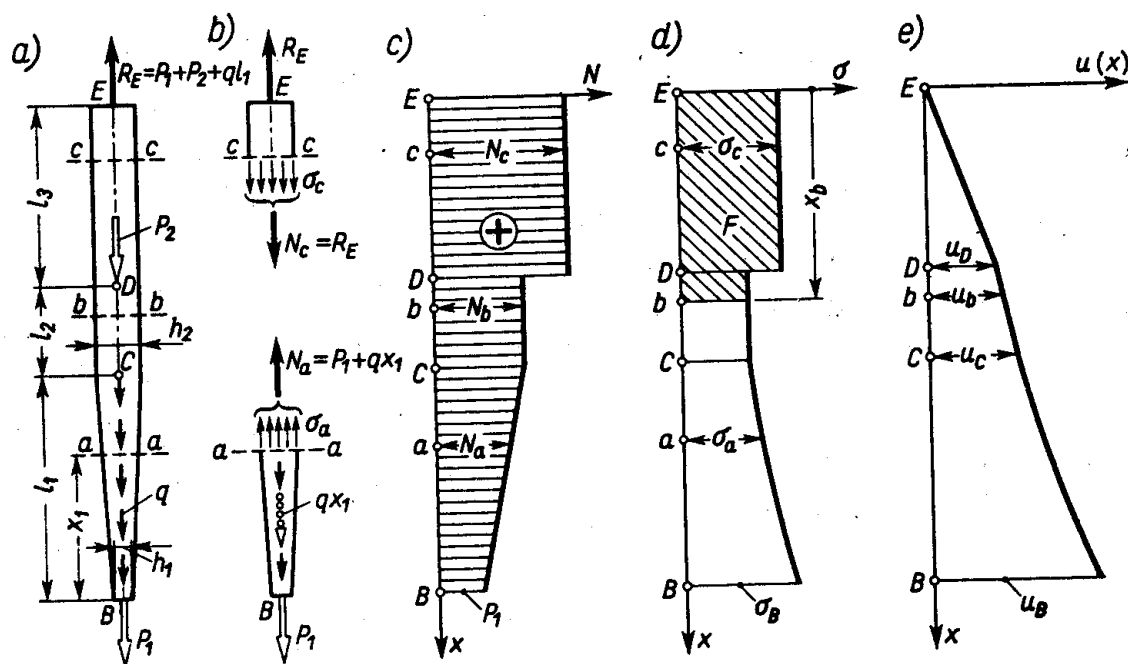
$$N_b = P_1 + ql_1, \quad (b)$$

czyli stałą siłą rozciągającą N_b . Podobnie badając równowagę dolnej myślowo odciętej

części możemy obliczyć wysiłek przekroju $c-c$. Prościej jednak jest obliczyć siłę N_c z warunku równowagi górnej części, widać bowiem, że

$$N_c = R_E = P_1 + P_2 + ql_1. \quad (c)$$

Wyniki te przedstawiamy na wykresie sił normalnych N (rys. 2.4c). Badanym przekrojom $a-a$, $b-b$, $c-c$ odpowiadają punkty a , b , c na osi odciętych równoległej do osi pręta, a rzędne dają wartości siły N_a , N_b , N_c . Jeśli nanieść rzędne dla wszystkich przekrojów, to ostatecznie wykres N składa się z trzech odcinków: jednego ukośnego i dwóch równoległych



Rys. 2.4. Przykład szczegółowej analizy pręta rozciąganego

do osi odciętych. Miejsce przeskoku odpowiada punktowi D , w którym przyłożona jest siła P_2 . Wykres ten daje przejrzysty obraz wysiłku wszystkich przekrojów pręta. Na jego podstawie wyznaczamy z wzoru (2.1) naprężenie σ dzieląc rzędne wykresu N przez odpowiednie pole przekroju (rys. 2.4d). W punkcie D odpowiadającym raptownej zmianie obciążenia występuje nieciągłość przebiegu σ . Z wykresu tego określamy *niebezpieczny przekrój*, w którym σ jest ekstremalne, czyli $\sigma = \sigma_{ekstr}$. Tę wartość σ_{ekstr} porównujemy z wartością naprężeń dopuszczalnych k_r dla materiału. Aby konstrukcja była prawidłowa, musi być

$$\sigma_{ekstr} \leq k_r. \quad (2.2)$$

Zmieniając tylko skalę rzędnych wykresu σ mamy przebieg wartości ε , gdyż zgodnie z prawem Hooke'a

$$\varepsilon = \sigma/E$$

i stąd możemy określić przemieszczenia $u(x)$ przekrojów pręta. Gdy przekrój E jest

utwierdzony ($u_E = 0$), wówczas przemieszczenie u_b przekroju $b-b$ jest równe wydłużeniu Δl_{Eb} części Eb pręta. To wydłużenie Δl_{Eb} jest równe sumie przyrostów εdx , o jakie zmieniają się długości elementarnych odcinków dx , czyli

$$\Delta l_{Eb} = \int_0^{x_b} \varepsilon dx = \frac{1}{E} \int_0^{x_b} \sigma dx. \quad (2.3)$$

Widzimy, że przemieszczenie $u_b = \Delta l_{Eb}$ jest równe zakreskowanemu na wykresie $\sigma(x)$ polu F dzielonemu przez moduł E . Obliczenie tego pola (całki) w prostszych przypadkach wykonujemy analitycznie, a w bardziej złożonych numerycznie, np. metodą trapezów.

Drugi typ, tzw. *zagadnienie kształtowania*, polega na takim doborze parametrów, aby spełniony był warunek $\sigma_{ekstr} \leq k_r$. Tymi parametrami są z reguły wymiary przekrojów poprzecznych, natomiast pozostałe parametry, jak długości, wartości sił i punkty ich zaczepienia są z góry ustalone. Jeśli obiektem kształtowania jest pręt (rys. 2.4), to ustalone są P_1, P_2, q i R_E oraz długości l_1, l_2 i l . Ponadto konstruktor z innych względów może ustalić, że pręt ten ma być wykonany z płaskownika, że na odcinku EC ma być $h_2 = \text{const}$, a na odcinku CB szerokość ma być zmienna liniowo od h_1 do h_2 . Przy takich ograniczeniach parametrami podlegającymi zmianom są tylko h_1, h_2 oraz grubość płaskownika δ . Dobór ich wartości rozpoczynamy od wykresu sił normalnych, z którego od razu widzimy, że przy $h_2 = \text{const}$ wszystkie przekroje odcinka ED są w jednakowych warunkach. Aby spełnić postulat $\sigma \leq k_r$, pole przekroju, tj. $h_2 \delta$, musi być

$$h_2 \delta = N_c / \sigma = R_E / \sigma \geq R_E / k_r. \quad (d)$$

Na odcinku DB niebezpieczny jest przekrój B , którego pole jest najmniejsze. Stąd wynika, że

$$h_1 \delta = N / \sigma = P_1 / \sigma \geq P_1 / k_r. \quad (e)$$

Jak widać, wzory (d) i (e) dają pewną swobodę, gdyż, zależnie od przyjętej grubości δ , mamy różne h_1 i h_2 . Zazwyczaj wartości te zaokrąglamy przyjmując najbliższe uzasadnione ze względów wykonawczych, na przykład w całych milimetrach.

Po ukształtowaniu pręta pozostałe etapy analizy (rys. 2.4d, e) zostają jak poprzednio. Ze zmodyfikowanego wykresu σ wynika, że materiał pręta jest w pełni wykorzystany na odcinku ED i w przekroju B , natomiast w pozostałych przekrojach odcinka DB jest on wykorzystany częściowo ($\sigma < k_r$). To niepełne wykorzystanie jest konsekwencją narzuconego w danym przypadku warunku (liniowa zmiana szerokości).

Jak widzimy, w obydwóch typach zagadnień przestrzega się tej samej kolejności, jak: określenie obciążenia, wysiłków przekrojów, naprężeń i wydłużeń. W prostszych zadaniach, lub po nabraniu wprawy, nie wszystkie te etapy muszą być tak wyraźnie demonstrowane, jak pokazano powyżej, lecz mogą być robione „w pamięci”. Wyjątkiem jest wykres sił normalnych. Ten wykreślny sposób przedstawiania wysiłku jest ogólnie przyjęty we wszystkich zadaniach.

Zadania

1. Przeprowadzić analizę pryzmatycznego pionowego pręta (rys. 2.5a) obciążonego siłą P i ciężarem własnym. Gęstość materiału ρ .

Rozwiązanie. Badając równowagę myślowo odciętej części dolnej (rys. 2.5b) otrzymujemy

$$N_a = P + \rho g A (l - x_a)$$

i wykres sił N , jako prostą o rzędnych $N_B = P$ i $N_E = P + \rho g A l$ (rys. 2.5c). Ponieważ $A = \text{const}$, zatem wykres σ (rys. 2.5c) jest kopią wykresu N w zmienionej tylko skali. Niebezpieczny jest przekrój E ($x_a = 0$), w którym

$$\sigma_E = N_E/A = (P/A) + \rho g l < k_r.$$

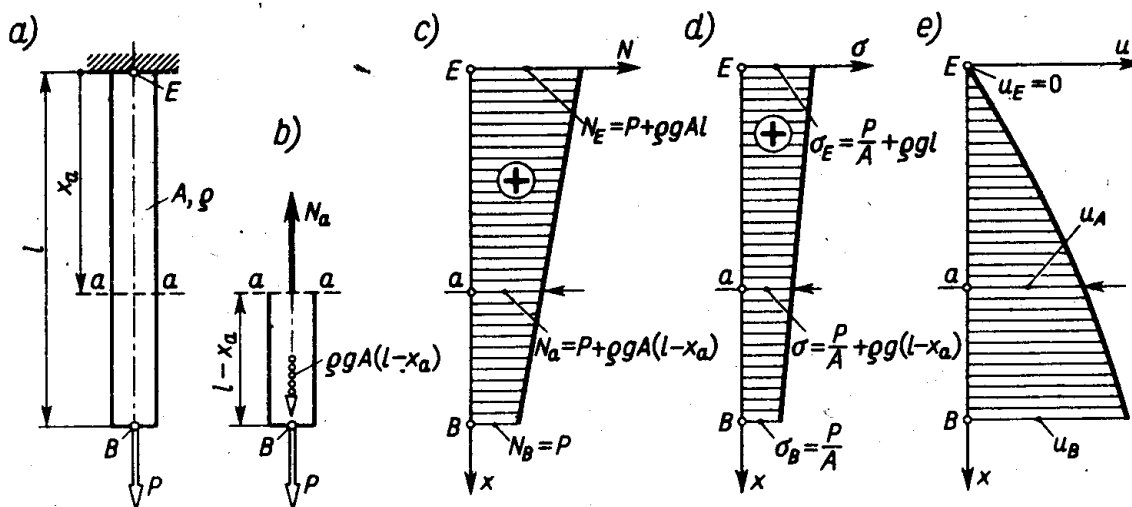
Przemieszczenie przekroju a - a obliczamy z wzoru (2.3)

$$u_a = \frac{1}{E} \int_0^{x_a} \sigma dx = \frac{1}{E} \frac{\sigma_E + \sigma}{2} x_a = \frac{P x_a}{EA} + \frac{\rho g}{E} \left(l x_a - \frac{x_a^2}{2} \right),$$

albowiem pole F odpowiadające odcinkowi x_a jest polem trapezu. Dla swobodnego końca ($x_a = l$) mamy przemieszczenie u_B

$$u_B = (Pl/EA) + (\rho g l^2/2E).$$

Wszystkie wyniki (N_a , σ , u) są sumą dwóch składników: jednego proporcjonalnego do P , drugiego do ciężaru właściwego ρg . Tak być powinno z uwagi na zasadę superpozycji. W budowie maszyn wpływ ciężaru własnego jest z reguły pomijalny i tylko dla lin wyciągów górniczych lub wiertniczych należy go uwzględnić.



Rys. 2.5. Pręt obciążony siłą skupioną i siłami masowymi

2. Lina wyciągu górniczego, według schematu z rys. 2.5a, obciążona na dolnym końcu ciężarem klatki $P = 50$ kN ma ciężar własny $q = 39$ N/m, pole $A = 3,9$ cm², długość $l = 800$ m. Określić współczynnik bezpieczeństwa liny i przemieszczenia u_B ($R_m = 1800$ MPa, $E = 1,8 \cdot 10^5$ MPa).

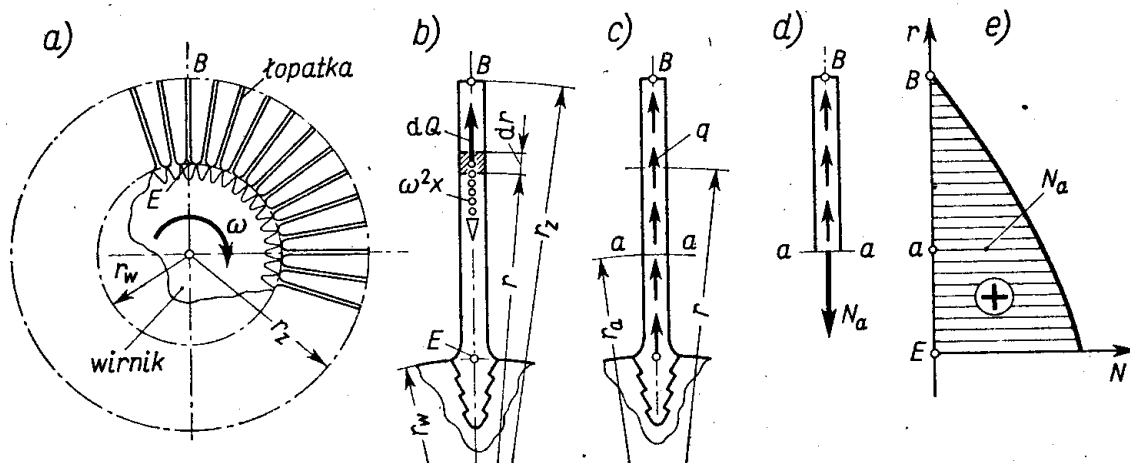
Odp. $\sigma_{ekstr} = \sigma_E = 208$ MPa, współczynnik $n_m = R_m/\sigma_{ekstr} = 8,7$, $u_B = 75$ cm. Duża wartość n_m uzasadniona z uwagi na niezawodność.

3. Określić naprężenia w wirującej z prędkością kątową ω promieniowej pryzmatycznej łopacie (rys. 2.6a). Gęstość materiału ρ . Dane liczbowe: $r_z = 75$ cm, $r_w = 50$ cm, oraz liczba obrotów $n = 3000$ obr/min, $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ kg/m³.

Rozwiązanie. Zadanie należy do dynamiki, ale można je sprowadzić do zadania statyki, jeśli dołączyć siły bezwładności równe iloczynowi masy przez przyspieszenie i skierowane przeciwnie do tego przyspieszenia (zasada d'Alemberta z mechaniki ogólnej). W naszym zadaniu elementarna ma-

sa jest $A \rho dr$, przyspieszenie dośrodkowe $\omega^2 r$ i elementarna siła bezwładności $dQ = A \rho dr \omega^2 r$ skierowana jest na zewnątrz od środka (rys. 2.6b). Na jednostkę długości siła masowa q jest

$$q = dQ/dr = \rho \omega^2 A r.$$



Rys. 2.6. Analiza pręta wirującego

Przez wprowadzenie tych sił mamy zadanie statyki (rys. 2.6c), z tym tylko, że q jest funkcją promienia r . Wysiłek przekroju a - a jest siłą normalną N_a wyznaczoną z równowagi odciętej myślowo części (rys. 2.6d)

$$N_a = \int_{r_a}^{r_z} q dr = \int_{r_a}^{r_z} \rho \omega^2 A r dr = \frac{\rho \omega^2 A}{2} (r_z^2 - r_a^2) = \frac{\rho \bar{v}^2}{2} A \left[1 - \left(\frac{r_a}{r_z} \right)^2 \right],$$

gdzie $\bar{v} = \omega r_z$ – prędkość obwodowa swobodnego końca łopatki. Wykres sił N jest parabolą (rys. 2.6e), w której $N = 0$ dla $r = r_a = r_z$. Ponieważ $A = \text{const}$, zatem przebieg $\sigma(r_a)$ ma podobny charakter, przy czym

$$\sigma_a = \frac{N_a}{A} = \frac{\rho \bar{v}^2}{2} \left[1 - \left(\frac{r_a}{r_z} \right)^2 \right]$$

nie zależy od wartości A . Dla wartości danych w zadaniu mamy $\bar{v} = (\pi \bar{n}/30) r_z = (\pi 3000/30) 0,75 = 235$ m/s, i dla $r_a = r_w$

$$\sigma_{\text{ekstr}} = \sigma_E = \frac{7,85 \cdot 10^3 \cdot 235^2}{2} \left[1 - \left(\frac{0,50}{0,75} \right)^2 \right] \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} = 121 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 121 \text{ MPa}.$$

4. Wyznaczyć całkowite wydłużenie łopatki z zadania poprzedniego (rys. 2.6). $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

Odp. Wstawiając do wzoru (2.3) wartość σ_a z poprzedniego zadania i całkując w granicach r_w , r_z mamy

$$u_B = \frac{1}{E} \int_{r_w}^{r_z} \sigma_a dr_a = \frac{\rho \bar{v}^2}{6E} (r_z - r_w) \left[2 - \left(\frac{r_w}{r_z} \right) - \left(\frac{r_w}{r_z} \right)^2 \right] \approx 0,080 \text{ mm}.$$

5. Wirujący pręt (łopatka) ma zmienny przekrój (rys. 2.7), przy czym $A_r = A_w (r_w/r)^3$. Wyznaczyć naprężenia, jeśli $\bar{v} = 235$ m/s, $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ kg/m³.

Odp. W porównaniu do zadania 3 mamy tu A zmienne. Siła N_a :

$$N_a = \int_{r_a}^{r_z} q dr = \int_{r_a}^{r_z} \rho \omega^2 \frac{A_w r_w^3}{r^3} r dr = \rho \bar{v}^2 A_w \left(\frac{r_w}{r_z} \right)^3 \left(\frac{r_z}{r_a} - 1 \right),$$

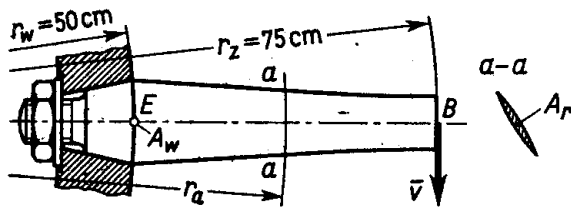
a naprężenia

$$\sigma_a = \frac{N_a}{A_a} = \rho \bar{v}^2 \left(\frac{r_a}{r_z} \right)^3 \left(\frac{r_z}{r_a} - 1 \right).$$

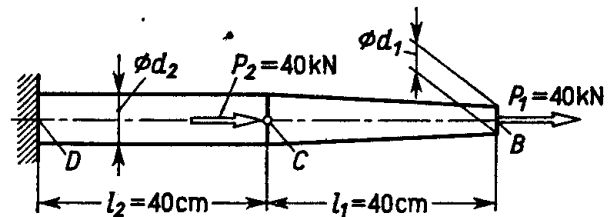
Dla danych jak w zadaniu 3 mamy w przekroju E , tj. dla $r_a = r_w$,

$$\sigma_{\text{ekstr}} = \sigma_E = 7,85 \cdot 10^3 \cdot 235^2 (2/3)^3 0,5 \approx 64 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 64 \text{ MPa},$$

czyli prawie dwa razy mniej niż poprzednio. Jest to jasne, gdyż zmniejszając pole przekroju w kierunku od osi obrotu, redukujemy tym samym siłę N_a w porównaniu z prętem o stałym polu przekroju A_w .



Rys. 2.7.



Rys. 2.8.

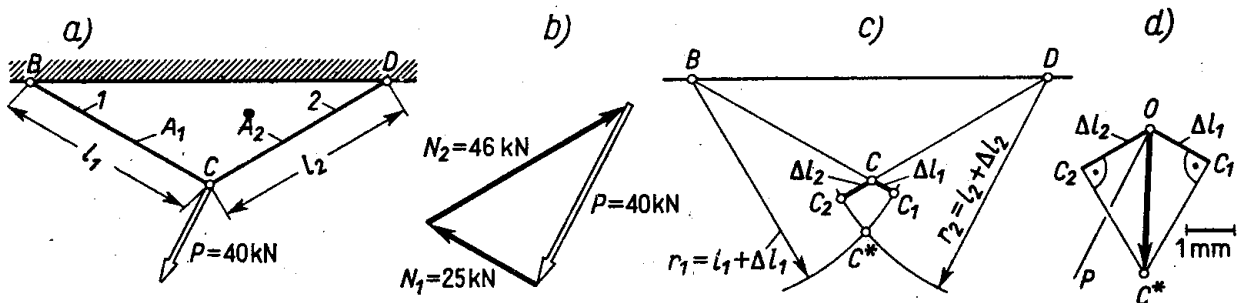
6. Walek (rys. 2.8) ma mieć stałą średnicę d_2 na odcinku DC i liniowo zmienną na odcinku CB . Dobrać te średnice (z dokładnością do 1 mm), aby wszędzie $\sigma < k_r$ ($k_r = 100 \text{ MPa}$) i wyznaczyć przemieszczenie punktu B , jeśli $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Odp. Na odcinku DC : $d_2 = \sqrt{4(P_1 + P_2)/\pi k_r} = 3,19 \text{ cm} \approx 32 \text{ mm}$, w przekroju B : $d_1 = \sqrt{4P_1/\pi k_r} = 2,25 \text{ cm} \approx 23 \text{ mm}$. Przemieszczenie punktu C : $u_C = k_r l_2/E \approx 0,20 \text{ mm}$. Na odcinku CB pole A_x przekroju

$$A_x = \frac{\pi d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2 - d_1}{d_1} \frac{l_1 - x_1}{l_1} \right)^2,$$

zatem wydłużenie względne $\varepsilon = P_1/EA_x$ i po scałkowaniu (2.3)

$$u_B = u_C + \int_0^{l_1} \varepsilon dx = u_C + (4P_1 l_1 / \pi d_1 d_2 E) = 0,20 + 0,14 = 0,34 \text{ mm}.$$



Rys. 2.9. Wyznaczenie przemieszczeń węzła dwuprętowego kratownicy

Dane: $P = 40 \text{ kN}$, $l_1 = l_2 = 2 \text{ m}$, $A_1 = 2 \text{ cm}^2$, $A_2 = 3 \text{ cm}^2$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

7. Wyznaczyć naprężenia w prętach podanej kratownicy (rys. 2.9a) oraz określić przemieszczenie węzła C .

Rozwiązanie. Siły w prętach wyznaczamy metodą wykreślną, znaną z mechaniki ogólnej (rys. 2.9b). Są to $N_1 = 25 \text{ kN}$ i $N_2 = 46 \text{ kN}$. Obie są rozciągające. Naprężenia w prętach 1 i 2 są odpowiednio

$$\sigma_{(1)} = 25 \cdot 10^3 \text{ N} / 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 125 \text{ MPa}, \quad \sigma_{(2)} = 153 \text{ MPa},$$

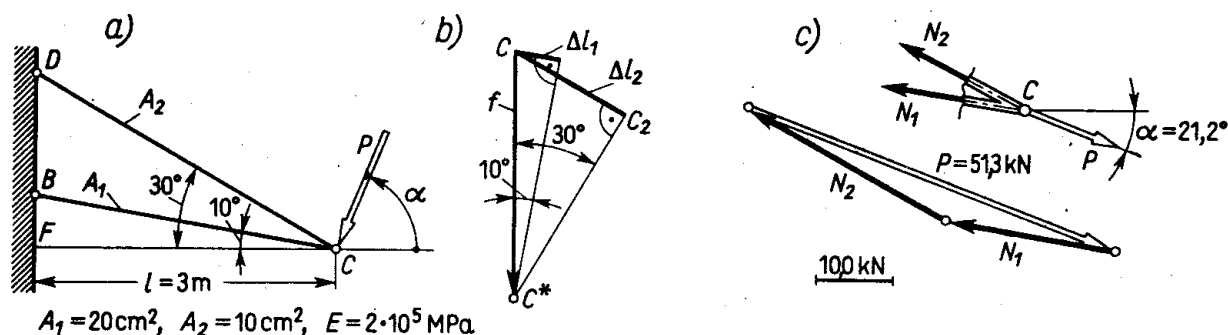
a wydłużenia prętów

$$\Delta l_1 = \sigma_{(1)} l_1 / E = 1,25 \text{ mm}, \quad \Delta l_2 = \sigma_{(2)} l_2 / E = 1,53 \text{ mm}.$$

Zmienione położenie węzła C , czyli C^* , otrzymujemy na obrazie kratownicy (rys. 2.9c) z przecięcia łuków kół zatoczonych z nieruchomych punktów B i D promieniami $r_1 = l_1 + \Delta l_1$ i $r_2 = l_2 + \Delta l_2$. Tę konstrukcję wykreślą narysowano w przesadzie. W rzeczywistości Δl_1 , Δl_2 oraz przemieszczenie węzła C , tj. odcinek CC^* , są bardzo małe w porównaniu do l_1 i l_2 . Uprawnia to do zastąpienia łuków C_1C^* oraz C_2C^* prostymi prostopadłymi odpowiednio do BC_1 i BC_2 . Dzięki temu można tę konstrukcję wykreślą (rys. 2.9d) odłączyć od rysunku kratownicy i wykonać ją w dużej skali, otrzymując szukane przemieszczenie $OC^* = CC^* = 2,8 \text{ mm}$ z zadowalającą dokładnością. Aby rezultat był prawidłowy, utożsamiamy w myśli punkt O z węzłem C kratownicy wyobrażając sobie jednocześnie, jaką pozycję względem punktu O zajmują pręty 1 i 2. Wydłużenia Δl_1 i Δl_2 odmierzamy w kierunku wyobrażonych prętów na zewnątrz, gdy pręty są rozciągane, lub do wewnątrz ich, gdy pręty są ściskane. Tak więc gdyby pręt 1 był ściskany, wówczas Δl_1 (skrócenie) odmierzylibyśmy od punktu O nie na prawo, jak na rys. 2.9d, lecz na lewo.

8. Jak zmienią się wyniki poprzedniego zadania, jeśli: a) wartość siły P zmaleje dwukrotnie; b) pola A_1 i A_2 przekrojów wzrosną dwukrotnie; c) tylko pole A_1 wzrośnie dwukrotnie?

Odp. a) wszystkie wielkości (N , σ , Δl oraz przemieszczenia węzła C) zmaleją dwukrotnie; b) dwukrotnie zmaleją σ , Δl oraz przemieszczenie węzła C , siły N zostaną bez zmiany; c) zmaleje dwukrotnie $\sigma_{(1)}$ oraz $\Delta l_1 = \overline{OC}_1$; to ostatnie spowoduje zmianę OC^* .



Rys. 2.10. Do zadania 9

9. Wyznaczyć wartość i kierunek działania siły P (rys. 2.10a), która w podanej kratownicy wywołuje pionowe przemieszczenie węzła C o wartości $f = 1 \text{ mm}$ w kierunku do dołu.

Rozwiązanie. Kreśląc obraz przemieszczeń (rys. 2.10b), na którym CC^* jest $f = 1 \text{ mm}$ wyznaczamy $\Delta l_1 = f \sin 10^\circ = 0,173 \text{ mm}$, $\Delta l_2 = f \sin 30^\circ = 0,500 \text{ mm}$, a stąd rozciągające siły:

$$N_1 = EA_1 \Delta l_1 / l_1 = 2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 0,173 \cdot 10^{-3} / 3,05 = 22,7 \text{ kN}, \quad N_2 = EA_2 \Delta l_2 / l_2 = 29,7 \text{ kN}.$$

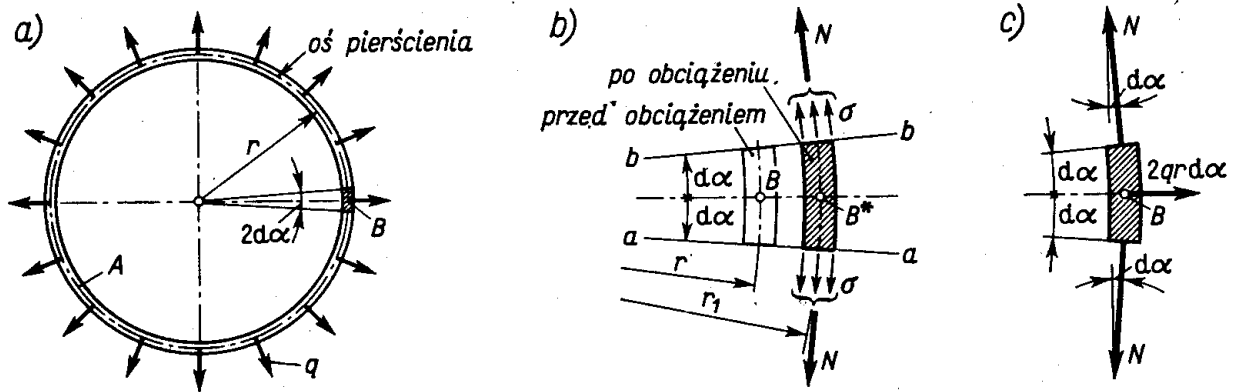
Badając teraz równowagę węzła C i kreśląc wielobok sił (rys. 2.10c) otrzymujemy $P = 51,3 \text{ kN}$, kąt $\alpha \approx 21,2^\circ$, a kierunek siły jest jak na rys. 2.10c.

2.3. Pierścień kołowy równomiernie obciążony

Omówione dotychczas przykłady dotyczyły prętów prostych. Rozciąganie występuje również w idealnie giętkich cięgnach, analizowanych w mechanice ogólnej (zagadnienie linii sznurowej).

Innym przykładem rozciągania pręta nie prostego, lecz zakrzywionego jest cienki pierścień kołowy o stałym przekroju pod równomiernym obciążeniem promieniowym $q \text{ N/m}$ (rys. 2.11a). Z racji punktowej symetrii pierścień zostaje po obciążeniu kołem o nieco

większym promieniu ($r_1 > r$). Każdy element pierścienia zachowując swój kształt (rys. 2.11b) wydłuży się w kierunku obwodowym. Jeżeli grubość pierścienia w kierunku promieniowym jest mała w porównaniu z promieniem r , to taka postać odkształcenia odpowiada rozciąganiu, przy którym istnieją naprężenia normalne do przekroju $a-a$. Ich wypadkowa $N = \sigma A$, czyli wysiłek przekroju $a-a$, jest styczna do koła w tym miejscu. To samo stwier-



Rys. 2.11. Analiza równomiernie obciążonego pierścienia ($A = \text{const}$)

dzimy o sile N działającej w przekroju $b-b$. Rozpatrując równowagę elementarnego odcinka (rys. 2.11c) i korzystając z reguły wymiarów początkowych, mamy równanie rzutów na kierunek promienia

$$-2N \sin d\alpha + 2qr d\alpha = 0,$$

z którego, przy $d\alpha \rightarrow 0$ i $\sin d\alpha \rightarrow d\alpha$, wynika, że

$$N = qr, \quad (2.4)$$

a wartość naprężeń normalnych

$$\sigma = N/A = qr/A. \quad (2.5)$$

Naprężeniom σ towarzyszy względne wydłużenie $\varepsilon = \sigma/E$ każdego elementu w kierunku obwodowym i zmiana promienia r o $\Delta r = r_1 - r$. Jest rzeczą jasną, że $\Delta r = r\varepsilon$, czyli

$$\Delta r = r\varepsilon = r\sigma/E = qr^2/EA. \quad (2.6)$$

Jednym z zastosowań wzorów (2.4) ÷ (2.6) jest przypadek pierścienia wirującego w swej płaszczyźnie z prędkością kątową ω . Obciążenie q stanowią tu siły bezwładności (zadanie 3 art. 2.2). Jeśli gęstość właściwa materiału jest ρ , to masa pierścienia na jednostkę długości jest ρA , a przyspieszenie dośrodkowe $\omega^2 r$ i wtedy siła bezwładności

$$q = \rho A \omega^2 r. \quad (a)$$

Podstawiając wynik (a) do (2.5) i wprowadzając prędkość obwodową $\bar{v} = \omega r$ mamy

$$\sigma = \rho \bar{v}^2, \quad (2.7)$$

a ze wzoru (2.6) zwiększenie promienia

$$\Delta r = \rho \bar{v}^2 r / E. \quad (b)$$

Jak widać, naprężenia σ w wirującym pierścieniu zależą tylko od rodzaju materiału i kwadratu prędkości obwodowej. W nowoczesnych maszynach prędkości te są duże i naprężenia σ mogą mieć znaczne wartości.

Zadania

1. Pierścień stalowy (grubość $\delta = 1$ cm, szerokość $b = 5$ cm, promień $r = 25$ cm, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $R_e = 240$ MPa) obciążony jest na wewnętrznej powierzchni ciśnieniem $p = 4,0$ MPa. Wyznaczyć naprężenie i odkształcenie pierścienia oraz współczynnik bezpieczeństwa n_e .

Odp. Promień wewnętrzny $r_w = r - (\delta/2) = 24,5$ cm, wobec czego $q = pbr_w/r = 196$ kN/m, $A = b\delta = 5$ cm², $\sigma = qr/A = 98$ MPa, $\Delta r = \sigma r/E = 0,117$ mm, $n_e = R_e/\sigma = 2,45$.

2. Obliczyć wartość naprężeń w pierścieniu stalowym ($\rho = 7,8 \cdot 10^3$ kg/m³, $r = 20$ cm) wirującym z $\bar{n} = 7000$ obr/min.

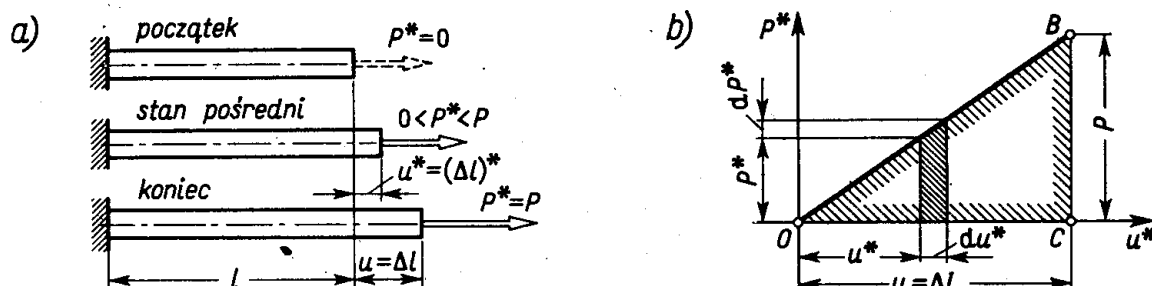
Odp. $\omega = \pi\bar{n}/30 = 734$ rad/s, $\bar{v} = \omega r = 147$ m/s, $\sigma = 168$ MPa.

3. W pierścieniu wirującym z $\bar{n} = 6000$ obr/min naprężenie $\sigma = 120$ MPa. Przy jakiej liczbie \bar{n}_1 obr/min nastąpi płynięcie materiału pierścienia, jeśli $R_e = 240$ MPa?

Odp. Osiągnięcie R_e nastąpi, gdy \bar{v} , a więc i \bar{n} , wzrośnie w stosunku $\sqrt{R_e/\sigma} = \sqrt{2} = 1,41$ razy, skąd $\bar{n}_1 = \bar{n}\sqrt{2} = 8500$ obr/min.

2.4. Energia odkształcenia przy rozciąganiu

Już w artykule 1.2 wprowadzono pojęcie energii odkształcenia. Obecnie prześledzimy to pojęcie na przykładzie rozciągania sprężystego pryzmatycznego pręta (rys. 2.12). Zakładamy, że proces obciążania, tj. wzrostu siły P^* od zera do końcowej wartości $P^* = P$, przebiega bardzo wolno. W takim, tzw. *quasi-statycznym*, procesie prędkości cząstek ciała



Rys. 2.12. Praca obciążenia przy rozciąganiu

są bardzo małe, ich kinetyczna energia jest pomijalna, a chwilowe przemieszczenie u^* swobodnego końca pręta jest równe wydłużeniu $(\Delta l)^*$ pręta przy statycznym działaniu siły P^* . Zgodnie więc z wzorem (1.7) mamy zależność

$$u^* = (\Delta l)^* = P^* l / EA, \quad (a)$$

której obrazem $P^* = f(u^*)$ jest linia prosta (rys. 2.12b).

Obliczmy teraz pracę, jaką wykonała siła P^* w całym procesie obciążania. Wzrostowi siły z wartości P^* do $P^* + dP^*$ odpowiada przyrost du^* , a elementarna praca dL siły P^*

$$dL = P^* du^*, \quad (b)$$

czyli równa jest polu zakreślowanemu na rys. 2.12b. Całkowita praca L jest sumą takich

elementarnych prac i równa się polu trójkąta OBC lub inaczej

$$L = \frac{1}{2} Pu = \frac{1}{2} P \Delta l, \quad (c)$$

gdzie P i Δl oznaczają odpowiadające sobie końcowe wartości siły i wydłużenia. Praca ta mierzona jest w niutonometrach, czyli dżulach ($1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$). Przy założonym quasi-statycznym procesie zamienia się ona całkowicie na energię potencjalną U cząstek ciała związaną ze zmianą ich wzajemnych odległości, tj.

$$U = L = \frac{1}{2} P \Delta l \text{ J.} \quad (2.8)$$

Wykorzystując wzór (a) możemy energię U wyrazić

$$U = P^2 l / 2EA \quad \text{lub} \quad U = (\Delta l)^2 EA / 2l, \quad (2.9)$$

tj. jako funkcję samej tylko siły obciążającej P bądź samego tylko wydłużenia Δl . Energia ta jest kwadratową funkcją P lub Δl , nie zależy zatem od ich znaku (rozciąganie czy ściskanie) i jest zawsze dodatnia, gdy $P \neq 0$. Z kolei nieliniowość zależności $U(P)$ powoduje, że energia odkształcenia nie podlega zasadzie superpozycji. Innymi słowy energia U przy jednoczesnym działaniu dwóch obciążeń P_1 i P_2 nie jest równa sumie energii U_1 i U_2 odpowiadających oddzielnemu działaniu tych obciążeń. Od tego stwierdzenia istnieją wyjątki, wymagające jednak za każdym razem szczegółowego uzasadnienia.

Przy rozciąganiu pryzmatycznego pręta jego elementy są w jednakowych warunkach, wobec czego w jednostce objętości ilość energii $U' = U/Al$ (w dżulach na m^3 , J/m^3). Wielkość U' , tzw. *właściwa energia odkształcenia*, jest miarą poziomu energetycznego jednostki objętości materiału. Wykorzystując wzór (2.9) mamy

$$U' = \frac{P^2}{2EA^2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.10)$$

lub

$$U' = \frac{E}{2} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{E \epsilon^2}{2}. \quad (2.11)$$

Podobnie określamy wielkość

$$U'' = U/Al \rho = U'/\rho \quad (2.12)$$

jako miarę poziomu energetycznego jednostki masy materiału przy rozciąganiu. Zastosowanie pojęć U' i U'' jest różnorakie. Jednym z nich jest ocena materiału z uwagi na możliwość akumulowania energii, jeśli za σ podstawić nieprzekraczalną ze względów użytkowych wartość granicy sprężystości, czyli $\sigma = \sigma_{spr}$.

Przy odciążaniu kolejność zjawisk jest odwrotna. Początek procesu odpowiada punktowi B , koniec punktowi O wykresu $P^* = f(u^*)$ (rys. 2.12b). Dla materiału sprężystego jest to ta sama prosta BO . Tak więc ilość pracy oddana na zewnątrz przy odciążaniu jest równa pracy włożonej w procesie obciążania, czyli że w zakresie sprężystości materiału przemiany energetyczne są całkowicie odwracalne. Nie uwzględniamy przy tym dodatkowych, zresztą bardzo małych, efektów wymiany ciepła z otoczeniem.

Zadania

1. Wyznaczyć ilość energii U w duralowym pręcie (rys. 2.12a), jeśli $P = 100 \text{ kN}$, $l = 30 \text{ cm}$, $A = 20 \text{ cm}^2$, $E = 7,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

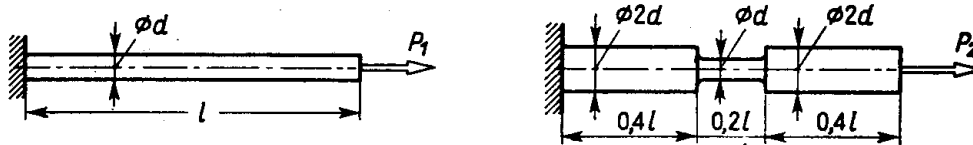
Od p. $U = (100 \cdot 10^3 \text{ N})^2 \cdot (0,3 \text{ m}) / 2 (7,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2) (20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = 10,7 \text{ N m} = 10,7 \text{ J}$.

2. Obliczyć ilość energii U w pierścieniu (rys. 2.11), jeśli $r = 20 \text{ cm}$, $A = 2 \text{ cm}^2$, $q = 20 \text{ kN/m}$, $E = 7,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

Od p. $U = \pi q^2 r^3 / EA \approx 0,72 \text{ N m} = 0,72 \text{ J}$.

3. Porównać zdolność akumulowania energii w stali sprężynowej ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_{spr} \approx 800 \text{ MPa}$, $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) i w gumie ($E = 1,5 \text{ MPa}$, $\sigma_{spr} = 2 \text{ MPa}$, $\rho = 0,95 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$).

Od p. $U'_{stal} = 204 \text{ J/kg}$, $U'_{guma} = 1400 \text{ J/kg}$, a więc guma jest około 7 razy lepsza niż bardzo dobra stal.



Rys. 2.13. Wpływ kształtu pręta na zdolność akumulowania energii

4. Dwa pręty wykonane z jednakowego materiału: gładki i stopniowany (rys. 2.13) mają pochłonąć tę samą energię U . Zakładając dla prostoty równomierność rozkładów σ w przekrojach pręta stopniowanego oraz, który z prętów jest bezpieczniejszy?

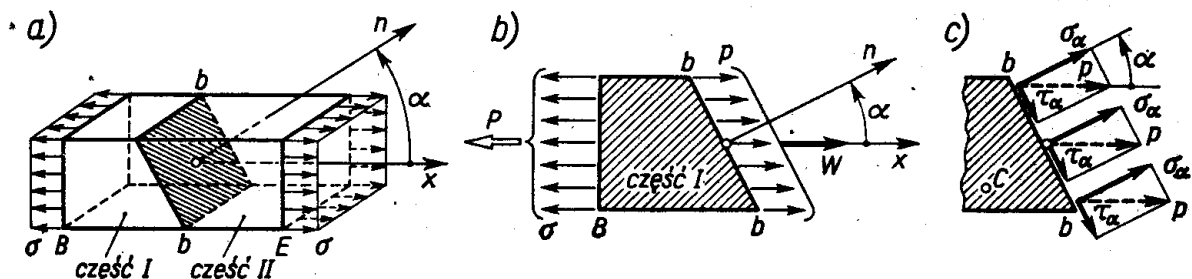
Od p. W pręcie gładkim: $U_1 = P_1^2 l / 2EA$, gdzie $A = \pi d^2 / 4$; w stopniowanym:

$$U_2 = 2 (P_2^2 \cdot 0,4 l / 2E \cdot 4A) + (P_2^2 \cdot 0,2 l / 2EA) = 0,4 (P_2^2 l / 2EA).$$

Gdy $U_1 = U_2$, wówczas $P_2 \sqrt{0,4} = P_1$ i $P_2 = 1,58 P_1$. W przewężeniu pręta stopniowanego $\sigma_2 = P_2 / A = 1,58 (P_1 / A)$, czyli σ_2 są większe niż $\sigma_1 = P_1 / A$ w pręcie gładkim. Tak więc gdy U jest to samo, pręt stopniowany jest gorszy od gładkiego.

2.5. Stan napięcia i odkształcenia przy rozciąganiu

Nawiązując do wprowadzonych w art. 1.5 i 1.6 pojęć stanu napięcia i odkształcenia zbadamy je dokładniej w przypadku rozciągania. W tym celu wyznaczmy najpierw na-



Rys. 2.14. Naprężenia w ukośnym przekroju rozciąganego pręta

prężenia w ukośnym przekroju $b-b$ (rys. 2.14a). Jego położenie w badanej części I określamy kątem α między osią x pręta a normalną n zewnętrzną dla tej części I . Wypadkowe naprężenia p (rys. 2.14b) są rozłożone równomiernie, gdyż wszystkie wzdłużne włókna pręta

znajdują się w identycznych warunkach. Ponadto naprężenia p muszą być równoległe do osi x , gdyż tylko wtedy badana część I może być w równowadze. Ich wypadkowa W jest

$$W = pA_\alpha = pA/\cos \alpha, \quad (a)$$

gdzie $A_\alpha = A/\cos \alpha$ — pole przekroju $b-b$. Z równowagi części I wynika, że $W - P = 0$. Po wykorzystaniu (a) i uwzględnieniu, że $\sigma = P/A$ jest naprężeniem w przekroju poprzecznym B , mamy

$$p = P \cos \alpha / A = \sigma \cos \alpha. \quad (b)$$

Rozkładając to wypadkowe naprężenie na normalne σ_α i styczne τ_α (rys. 2.14c) mamy

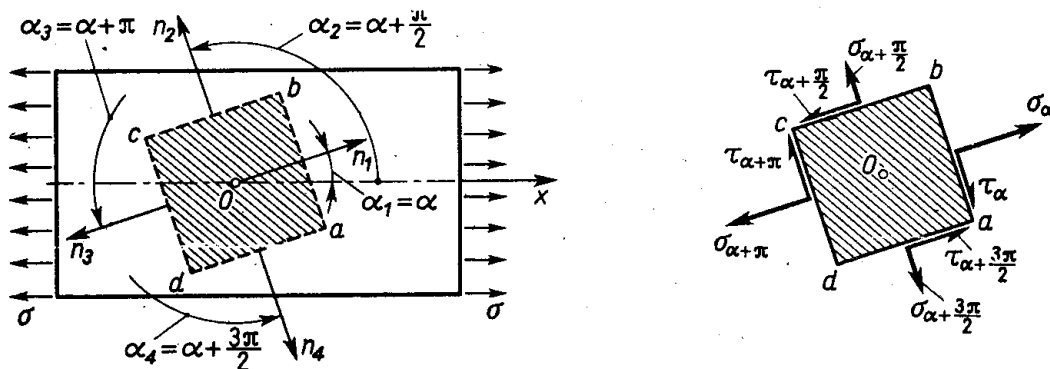
$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad (2.13)$$

$$\tau_\alpha = p \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2.14)$$

Te same wyniki otrzymamy w przypadku ściskania, gdy $\sigma < 0$. Ujemne wartości σ_α i τ_α oznaczają zwroty przeciwne⁽¹⁾ niż na rys. 2.14c. Aby ułatwić orientację w znakach, zauważmy, że σ_α jest dodatnie, gdy działa *na zewnątrz* rozpatrywanej części I . Naprężenie τ_α jest dodatnie, gdy daje ono *współzegarowy*⁽²⁾ obrót rozpatrywanej części.

Pokazane na rys. 2.14 przecięcie $b-b$ jest jednokrotne. Równie dobrze można w tym samym pręcie prowadzić przecięcia wielokrotne. Prowadząc na przykład w pręcie cztery różne przekroje $a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-a$ odpowiadające kątom $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha + (\pi/2)$, ... wycinamy z pręta prostokątną kostkę (rys. 2.15). Z wzorów (2.13) i (2.14) po podstawieniu kolejno $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ wynika, że

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha+\pi} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{\alpha+(\pi/2)} = \sigma_{\alpha+(3\pi/2)} = \sigma \sin^2 \alpha, \quad (c)$$



Rys. 2.15. Przykład przecięcia wielokrotnego (wycięcie kostki)

a naprężenia styczne na prostopadłych do siebie ścianach

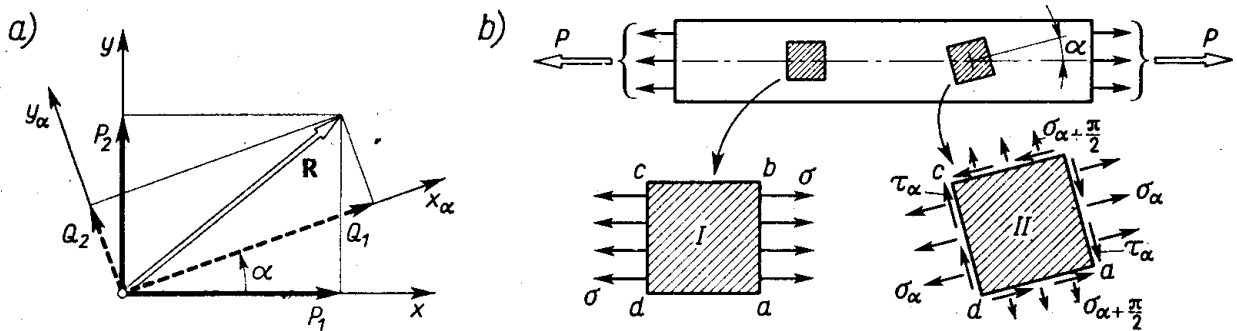
$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+(\pi/2)} = \tau_{\alpha+\pi} = -\tau_{\alpha+(3\pi/2)} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha \quad (d)$$

⁽¹⁾ Sens symbolu σ jest dwójaki. Na rysunku 2.14a, b przedstawia on i obraz, i wartość naprężenia. We wzorach (2.13) i (2.14) symbol σ oznacza tylko konkretną wartość, podczas gdy obraz naprężenia jest jak na rys. 2.14c.

⁽²⁾ W podręczniku tym zamiast używanego dotychczas określenia: „kierunek zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara” używa się umownie skrótu „współzegarowy” i podobnie „przeciwzegarowy” zamiast „kierunek przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara”.

mają dla każdego kąta α jednakowe bezwzględne wartości. Wynik ten jest słuszny dla każdego stanu naprężenia nie tylko rozciągania i nosi nazwę *zasady symetrii naprężeń stycznych*.

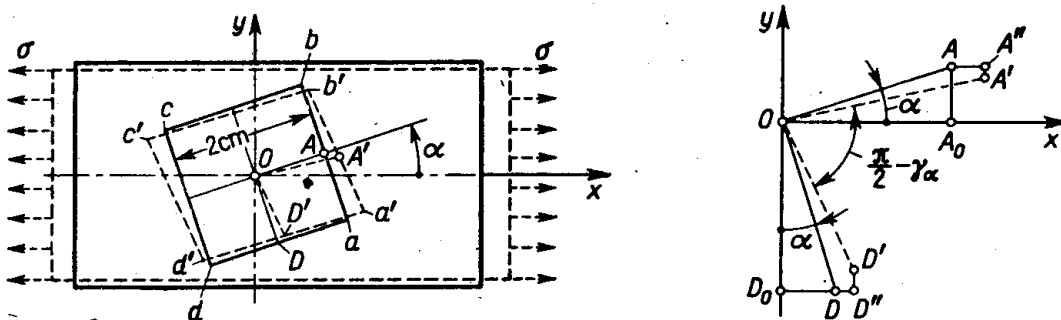
Fizyczny sens tych rozważań łatwo zrozumieć przez analogię do przedstawienia jakiegoś wektora \mathbf{R} w różnych układach współrzędnych (rys. 2.16a). W układzie x, y składowe wektora są P_1 i P_2 , w układzie x_α, y_α są to Q_1 i Q_2 różne od poprzednich, sam jednak wektor \mathbf{R} nie zmienia się. Ten właśnie sens mają podane tu przekształcenia. I tak dwóm różnym wycięciom kostek z tego samego pręta (rys. 2.16b) odpowiadają różne



Rys. 2.16. Analogia zagadnień: rozkład wektora i analiza stanu naprężenia

obrazy naprężeń, jeden prostszy (kostka I), drugi bardziej złożony (kostka II). Stan naprężenia materiału zostaje ten sam, jest tylko inaczej przedstawiony. Tę tożsamość stanu w obydwóch obrazach (analogia do wektora \mathbf{R}) uwidaczniamy nazywając każdy z nich *stanem prostego rozciągania*. Jest oczywiste, że tożsamość ta istnieje tylko wtedy, gdy σ, σ_α i τ_α spełniają zależności (2.13) i (2.14) (patrz także zadania 3 i 4).

Pokazana analogia nie oznacza, że stan naprężenia jest wektorem. Gdyby tak było, wypadkowa z σ_α i τ_α , czyli naprężenie p , nie zależałoby od ustawienia przekroju, czyli kąta α . Wzór (b) przeczy temu przypuszczeniu. Wynika stąd, że *stan naprężenia nie jest wektorem i że sumowanie, rozkład lub superpozycję naprężeń można wykonywać tylko wtedy, gdy działają one w jednym ustalonym przekroju*.



Rys. 2.17. Stan odkształcenia przy rozciąganiu

Zbadajmy obecnie obraz odkształceń kostki $abcd$ (rys. 2.17). Dla prostoty rozważań przyjmujemy, że jest ona kwadratem o boku 2 cm i że jej środek O jest nieruchomy. Określmy przemieszczenia punktów A i D , będących środkami boków. Jak wiemy z art. 1.7, elementy wzdłużne doznają wydłużenia ε , a poprzeczne skrócenia $-\nu\varepsilon$. Ponieważ rzuty

ukośnego elementu OA na osie x i y są odpowiednio $OA_0 = 1 \cdot \cos \alpha$ i $A_0A = 1 \cdot \sin \alpha$, zatem punkt A dozna poziomego przemieszczenia $AA'' = 1 \cdot \varepsilon \cos \alpha$ i pionowego $A''A' = -1 \cdot \nu \varepsilon \sin \alpha$. Zmienione po odkształceniu rzuty odcinka OA na osie x i y są odpowiednio

$$x_A = (1 + \varepsilon) \cos \alpha, \quad y_A = (1 - \nu \varepsilon) \sin \alpha. \quad (e)$$

Podobnie znajdujemy zmienione po odkształceniu rzuty odcinka OD

$$x_D = (1 + \varepsilon) \sin \alpha, \quad y_D = -(1 - \nu \varepsilon) \cos \alpha, \quad (f)$$

przy czym $y_D < 0$, gdyż i pierwotny rzut $OD_0 = -1 \cdot \cos \alpha < 0$. Z zależności (e) i (f) wyznaczamy⁽¹⁾ zmienione długości $\overline{OA'}$ i $\overline{OD'}$. I tak

$$\overline{OA'} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \approx \sqrt{1 + 2\varepsilon(\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha)} \approx 1 + \varepsilon(\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha),$$

a względne wydłużenie ε_α w kierunku OA

$$\varepsilon_\alpha = (\overline{OA'} - \overline{OA}) / \overline{OA} = \varepsilon(\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha). \quad (g)$$

Podobne przekształcenia dla odcinka $\overline{OD'}$ dają

$$\varepsilon_{\alpha - \frac{\pi}{2}} = (\overline{OD'} - \overline{OD}) / \overline{OD} = \varepsilon(\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) \quad (h)$$

jako wartość wydłużenia względnego w kierunku OD . Na koniec określamy kąt $A'OD'$ z iloczynu skalarnego wektorów OA' i OD'

$$\cos \sphericalangle A'OD' = x_A x_D + y_A y_D = [(1 + \varepsilon)^2 - (1 - \nu \varepsilon)^2] \sin \alpha \cos \alpha. \quad (i)$$

W rzeczywistości kąt $A'OD'$ różni się tylko o bardzo mały kąt γ_α od kąta prostego $\pi/2$, wobec czego $\cos \sphericalangle A'OD' = \cos [(\pi/2) - \gamma_\alpha] = \sin \gamma_\alpha \approx \gamma_\alpha$. Uwzględniając to otrzymujemy z wyrażenia (i)

$$\gamma_\alpha = 2(1 + \nu) \varepsilon \sin \alpha \cos \alpha, \quad (j)$$

przy czym pominięto, jak poprzednio, wielkość ε^2 w stosunku do ε . Wprowadzony tu kąt γ_α jest znanym już z art. 1.6 kątem odkształcenia postaciowego. Świadczy to, że badana kostka $abcd$ zamienia się w równoległoboczną $a'b'c'd'$.

Zależności (g), (h) oraz (j) sformułowano wyłącznie z zależności geometrycznych. Należy jednak pamiętać, że przyczyną odkształceń jest rozciąganie naprężeniami σ . Aby uwidocznic ten przyczynowy związek, należy w tych zależnościach podstawic $\varepsilon = \sigma/E$. W szczególności zależność (j) przybiera wtedy postać

$$\gamma_\alpha = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2.15)$$

Jak widać, kąt γ_α jest proporcjonalny do naprężenia τ_α (wzór d). Kwestię tę zbadamy dokładniej w art. 3.1.

⁽¹⁾ Uwzględniając przy tym, że ε jest małe (rzędu $0/_{00}$), pomijamy ε^2 w stosunku do ε . Ponadto korzystamy z przybliżenia

$$\sqrt{1+a} \approx 1+(a/2), \quad \text{gdy} \quad a \ll 1.$$

Zadania

1. W pręcie (rys. 2.14a) $\sigma = 100$ MPa. Wyznaczyć i narysować składowe naprężenia σ_α i τ_α w przekrojach, gdy: $\alpha_1 = -\pi/6 = -30^\circ$, $\alpha_2 = \pi/3 = 60^\circ$. Sprawdzić słuszność zasady symetrii τ .

Odp. $\sigma_{-30^\circ} = 75$ MPa, $\sigma_{60^\circ} = 25$ MPa, $\tau_{-30^\circ} = -43,3$ MPa = $-\tau_{60^\circ}$.

2. W pręcie (rys. 2.14a) $\sigma = -120$ MPa (ściskanie). Wyznaczyć ustawienie przekroju, w którym: a) $\sigma_\alpha = -30$ MPa, b) $\tau_\alpha = 30$ MPa.

Odp. a) $\alpha = \pm 60^\circ, \pm 120^\circ$; b) $\alpha = -15^\circ, -75^\circ, 105^\circ, 165^\circ$.

3. Na bokach ab i cd kostki II (rys. 2.16b) działają $\sigma' = 80$ MPa, na bokach bc i da zaś $\sigma'' = 20$ MPa, na wszystkich bokach $\tau = 40$ MPa skierowane jak na rysunku. Czy to jest stan prostego rozciągania?

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że tak jest. Wtedy σ' , σ'' oraz τ muszą spełniać równania (2.13) i (2.14). Niewiadomymi są: σ i α . Ponieważ boki ab i bc są prostopadłe do siebie, zatem z wzorów (c) mamy

$$\sigma_\alpha = \sigma' = 80 \text{ MPa} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{\alpha+(\pi/2)} = \sigma'' = 20 \text{ MPa} = \sigma \sin^2 \alpha,$$

skąd

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\sigma''/\sigma'} = \pm 0,5, \quad \cos^2 \alpha = 1/(1+\operatorname{tg}^2 \alpha) = 0,8, \quad \sigma = 100 \text{ MPa}.$$

Sprawdźmy teraz zależność (2.14). Gdy $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$, $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$, $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$ i wtedy dane $\tau = 40$ MPa ma być równe $\tau_\alpha = 100 \cdot (1/\sqrt{5}) \cdot (2/\sqrt{5}) = 40$ MPa, co, jak widać, ma miejsce. Wartość α , gdy $\operatorname{tg} \alpha = -0,5$, nie spełnia równania (2.14), bo dane $\tau > 0$, a $\tau_\alpha < 0$. Badany stan jest więc stanem prostego rozciągania, gdy $\sigma = 100$ MPa, $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,5 \approx 26,6^\circ$.

4. Jeśliby na kostkę z zadania poprzedniego działały naprężenia $\sigma'' = -20$ MPa (ściskanie) przy innych danych nie zmienionych, to czy taki stan byłby stanem prostego rozciągania?

Odp. Nje, gdyż $\operatorname{tg} \alpha$ miałby wtedy wartość urojoną.

5. Wyznaczyć względne wydłużenie i kąt odkształcenia postaciowego kostki $abcd$ (rys. 2.17), gdy $\alpha = \pi/6 = 30^\circ$, $\nu = 0,3$, $\varepsilon = 0,7^\circ/100$.

Odp. W kierunku OA : $\varepsilon_\alpha = 0,7 \cdot 10^{-3} (0,75 - 0,3 \cdot 0,25) = 0,47 \cdot 10^{-3} = 0,47^\circ/100$; w kierunku OD : $\varepsilon_{\alpha-(\pi/2)} = 0,017 \cdot 10^{-3} = 0,017^\circ/100$; kąt $\gamma_\alpha = 0,79 \cdot 10^{-3}$ rad.